THỦ THUẬT TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM CƠ BẢN BẰNG CASIO

Nguyễn Minh Tuấn – THPT Bình Minh

Tham khảo thêm tại blog Casioer team:

https://drive.google.com/file/d/0BzdhLKdFcFCvUHh6TnFpdnFadTg/view?usp=sharing

A. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT ĐA THỨC.

Để tận dụng tốt phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$ ở trong máy tính trong việc tính đạo hàm ta sẽ có cách để tính đạo hàm của các hàm số đa thức như sau:

- **Bước 1:** Nhập vào máy $\frac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=X}$
- **Bước 2:** $\boxed{\text{CALC}}$ $X=1000$ sau đó ta tiến hành biểu diễn số đó qua X và thế là xong!

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số sau:

$$f(x)=(x^3+3x^2+2)(x+1)^2-(x+2)^3(x^2+x+1)-x-2$$

- **Bước 1:** Nhập vào máy:

$$\frac{d}{dx}\left((X^3+3X^2+2)(X+1)^2-(X+2)^3(X^2+X+1)-X-2\right)\Big|_{x=X}$$

- **Bước 2:** $\boxed{\text{CALC}}$ $X=1000$ ta được kết quả: -8036042017

Tuy nhiên đây là kết quả tính của máy VINACAL còn máy VN sẽ ra kết quả khác hình ảnh như sau:

Đó là hình ảnh kết quả tìm được của máy Casio 570 Vn. Cái đuôi của kết quả là 36 còn của VINACAL là 17. Bằng thực nghiệm ta thấy kết quả 17 của máy VINACAL là đúng. Những bạn nào đang dùng VN hay dùng máy CASIO thì đừng quá quan trọng lỗi này, ta vẫn có thể khắc phục bằng cách sau:

Sau khi tìm được kết quả của x^2 ta sẽ $\boxed{\text{CALC}}$ $X=0$ để tìm hệ số tự do, sau đó trừ đi hệ số tự do rồi $\boxed{\text{CALC}}$ $X=1$ để tìm hệ số của X thế là kết quả là đúng. Ngoài ra khi bậc của đạo hàm quá cao thì ta vẫn có thể dùng cách $\boxed{\text{CALC}}$ $X=0.001$ để tìm lần lượt các hệ số từ bậc nhỏ đến lớn.

+ Tiến hành rút gọn ta được kết quả như sau: $-8036042017=-8x^3-36x^2-42x-17$

+ Ghi vào sau: $+8X^3+36X^2+42X+17$, CALC $X=\pi$ ta được:

Vậy kết quả tính đạo hàm là đúng!

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số sau:

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)^2-(x+1)(x-2)-(x^2+x+1)x$$

- **Bước 1:** Nhập vào máy:

$$\frac{d}{dx}\left((X+1)(X^2+2X+3)^2-(X+1)(X-2)-(X^2+X+1)X\right)\Big|_{x=X}$$

- **Bước 2:** $\boxed{\text{CALC}}$ $X=1000$ ta được kết quả: 5.02003904×10^{12}

+ Tiến hành rút gọn ta được kết quả như sau:

$5.02003904\times10^{12}=5x^4+20x^3+39x^2+40x+21$

+ Ghi vào sau: $-5X^4-20X^3-39X^2-40X-21$, CALC $X=\pi$ ta được kết quả bằng 0 tức là kết quả tính đúng!

B. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT PHÂN THỨC.

Giả sử ta phải tính đạo hàm của hàm $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ thì gồm những bước sau:

- **Bước 1:** Nhập vào máy: $g(x)^2\times\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=X}$

Do công thức tính đạo hàm của hàm $y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ nên ta phải nhân vào trước biểu thức $g(x)^2$ để làm mất mẫu.

- **Bước 2:** Sau đó tiến hành rút gọn ta được tử của y' là đa thức $h(x)$. Cuối cùng chỉ việc ghi vào bài làm là $y'=\frac{h(x)}{g(x)^2}$, và thế là xong!

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\dfrac{x^3+x(x^2+x+1)+x^2+2}{x^2+1}$

- **Bước 1:** Nhập vào máy biểu thức sau:

  $(X^2+1)^2\times\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{X^3+X(X^2+X+1)+X^2+2}{X^2+1}\right)\Bigg|_{x=X}$

- **Bước 2:** CALC $X=1000$ ta được kết quả 2.000005×10^{12}

+ Tiến hành rút gọn biểu thức trên ta được kết quả: $2.000005\times10^{12}=2x^4+5x^2+1$

+ Ghi vào sau: $-2X^4-5X^2-1$, CALC $X=\pi$ được kết quả:

- Vậy kết quả tính đạo hàm là đúng!
- Như vậy kết quả của bài toán là:

$$f(x)=\frac{x^3+x(x^2+x+1)+x^2+2}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x^4+5x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\dfrac{(x+1)^4}{(2x-4)^3}$

Nhận xét: Theo như các bước làm ở trên, ta sẽ nhập vào màn hình biểu thức $(2x-4)^6\times\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(x+1)^4}{(2x-4)^3}\right)\Bigg|_{x=X}$ Nhưng tuy nhiên với phương pháp CALC $X=1000$ ta thì bắt đầu có vấn đề vì máy tính chỉ tính chính xác trong khoảng $\left[-10^{15};10^{15}\right]$ mà x^6 đã lên tới 10^{18}, cho nên cách này làm chắc chắn thất bại. Mà cho dù bạn nào có CALC $X=100$ để giảm số mũ thì chắc chắn cũng sai vì bài này hệ số rất lớn! Do đó ta làm như sau, nhập vào máy biểu thức sau $(2x-4)^4\times\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(x+1)^4}{(2x-4)^3}\right)\Bigg|_{x=X}$. Mình đoán rằng sau khi tôi viết thế này chắc có nhiều bạn sẽ đặt câu hỏi là tại sau dưới mẫu là $(2x-4)^4$ mà không phải là $(2x-4)^6$ theo như công thức tính đạo hàm. Sau đây là chứng minh:

+ Ta có:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h^n(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x).h^n(x)-g(x)\left[h^n(x)\right]'}{h^n(x)^2}=\frac{g'(x)h^n(x)-g(x)\left[n.hx^{n-1}(x).h'(x)\right]}{h^{2n}(x)}$$

$$=\frac{h^{n-1}(x)\left[g'(x).h(x)-ng(x).h'(x)\right]}{h^{2n}(x)}=\frac{g'(x).h(x)-n.g(x).h'(x)}{h^{n+1}(x)}$$

Đó là cách chứng minh , các bạn hiểu tại sao là $(2x-4)^4$ mà không phải là $(2x-4)^6$ rồi chứ?

Đến đây ta đã tìm được đạo hàm của $f(x)$ là: $f'(x)=\dfrac{2x^4-16x^3-60x^2-64x-22}{(2x-4)^4}$

C. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM 1 CĂN

- **Bước 1:** Áp dụng 3 công thức tính đạo hàm sau đây:
  - a. $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$
  - b. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
  - c. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g(x)^2}$
- **Bước 2:** Giả sử cần tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{h(x)+g(x)\sqrt{f(x)}}{v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)}$

❖ Đầu tiên theo như công thức ta sẽ nhân 2 biểu thức sau với công thức tính đạo hàm đó là $2\sqrt{u(x)}$ và $\left(v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)\right)^2$.

❖ Tiếp theo khi đã có biểu thức

$:2\sqrt{u(x)}\left(v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)\right)\times\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{h(x)+g(x)\sqrt{u(x)}}{v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)}\right)\Bigg|_{x=X}$

Ta làm như sau:

- CALC $X=1000$ sau đó gán vào A:

$$2\sqrt{u(x)}\left(v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)\right)^2\times\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)+g(x)\sqrt{u(x)}}{v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)}\right)\Bigg|_{x=X}\to A$$

- Đổi dấu $\sqrt{u(x)}$, CALC $X=1000$ sau đó gán vào B

$$-2\sqrt{u(x)}\left(-v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)\right)^2\times\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)-g(x)\sqrt{u(x)}}{-v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)}\right)\Bigg|_{x=X}\to B$$

❖ Kết quả sau khi tính đạo hàm có dạng: $f'(x)=\dfrac{t(x)\sqrt{u(x)}+1(x)}{2\sqrt{u(x)}\left(v(x)\sqrt{u(x)}+m(x)\right)^2}$

❖ Trong đó $\begin{cases} t(x)=\dfrac{A-B}{2\sqrt{u(x)}} \\ 1(x)=\dfrac{A+B}{2} \end{cases}$

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+1}$

- **Bước 1:** Giống như cách làm như trên, ta nhập vào máy

$$2\sqrt{X^2+2}\left(\sqrt{X^2+2}+1\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+1+\sqrt{X^2+2}}{\sqrt{X^2+2}+1}\right)\Bigg|_{x=X}$$

- **Bước 2:**

+ Chưa đổi dấu, $\text{CALC } X=1000$ gán vào A

$$2\sqrt{X^2+2}\left(\sqrt{X^2+2}+1\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+1+\sqrt{X^2+2}}{\sqrt{X^2+2}+1}\right)\Bigg|_{x=X}\to A$$

+ Đổi dấu $\sqrt{X^2+2}$, $\text{CALC } X=1000$ gán vào B

$$-2\sqrt{X^2+2}\left(-\sqrt{X^2+2}+1\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+1-\sqrt{X^2+2}}{-\sqrt{X^2+2}+1}\right)\Bigg|_{x=X}\to B$$

Ta được lần lượt A,B như sau:

$2\sqrt{X^2+2}(\sqrt{X^2+2}+1.$	$-2\sqrt{X^2+2}(-\sqrt{X^2+2}\cdot$
2004010008	1996006000

- **Bước 3:** Đạo hàm có dạng $f'(x)=\dfrac{g(x)\sqrt{x^2+2}+v(x)}{2\sqrt{x^2+2}\left(\sqrt{x^2+2}+1\right)^2}$

Với $\begin{cases} g(x)=\dfrac{A-B}{2\sqrt{x^2+2}}=4x+2 \\ v(x)=\dfrac{A+B}{2}=2x^3+8x+4 \end{cases}$

- Vậy kết quả của bài toán là:

$$f(x)=\frac{x^2+x+1+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+2)\sqrt{x^2+2}+2x^3+8x+4}{2\sqrt{x^2+2}\left(\sqrt{x^2+2}+1\right)^2}$$

Ví Dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2+(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}-2}$

Nhận xét: Đối với bài này hay một số bài khác nhìn hình thức khá là phức tạp thì ta nên $\text{CALC } X=100$ để được kết quả chính xác, bởi vì nếu $\text{CALC } X=1000$ thì sau khi rút gọn kết quả của hệ số x và hệ số tự do bị sai, và đừng bao giờ $\text{CALC } X=0.001$ nó làm các bạn rất khó để khai triển, và hầu như tôi thấy phải mò rất lâu thì mới được kết quả chính xác. Vì khi $\text{CALC } X=0.001$ ta tìm được đến hệ số của x^2 và đáng lẽ ra đến đó là hết nhưng tuy nhiên do sai số nó lại cho tôi một dãy số đằng sau làm tôi nhầm tưởng chưa khai triển hết, và đến đó là sai!. Và tôi cũng nói thêm cách này chỉ giúp được cho những bài có $X=100 \text{ or } X=1000$ nằm trong tập xác định thì mới có thể làm được, còn những trường

hợp còn lại như tôi đã nói không nên dùng cách $\text{CALC X} = 0.001$, bạn nào muốn thử thì tùy nhé, tính tay còn nhanh hơn!.

- **Bước 1:** Nhập vào máy biểu thức:

$$2\sqrt{X^2+X+1}\left((X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+2+(X+2)\sqrt{X^2+X+1}}{(X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2}\right)\Bigg|_{x=X}$$

- **Bước 2:**
- Chưa đổi dấu, $\text{CALC X} = 1000$ gán vào A

$$2\sqrt{X^2+X+1}\left((X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+2+(X+2)\sqrt{X^2+X+1}}{(X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2}\right)\Bigg|_{x=X}\to A$$

- Đổi dấu $\sqrt{X^2+X+1}$, $\text{CALC X} = 1000$ gán vào B

$$-2\sqrt{X^2+X+1}\left(-(X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{X^2+X+2-(X+2)\sqrt{X^2+X+1}}{-(X-1)\sqrt{X^2+X+1}-2}\right)\Bigg|_{x=X}\to B$$

- Ta được kết quả lần lượt như sau:

Math ▲ $2\sqrt{X^2+X+1}((X-1)\sqrt{\ }$▷	Math ▲ $-2\sqrt{X^2+X+1}(-(X-1$▷
-9354046.138	2989822.138

- **Bước 3:** Đạo hàm có dạng $f'(x)=\dfrac{g(x)\sqrt{x^2+x+1}+v(x)}{2\sqrt{x^2+x+1}\left((x-1)\sqrt{x^2+x+1}-2\right)^2}$

$$\text{Với}\begin{cases} g(x)=\dfrac{A-B}{2\sqrt{x^2+x+1}}=-61410=-6x^2-14x-10\\ v(x)=\dfrac{A+B}{2}=-3182112=-3x^3-18x^2-21x-12\end{cases}$$

- Vậy kết quả của bài toán là:

$$f(x)=\frac{x^2+x+2+(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}-2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(-6x^2-14x-10\right)\sqrt{x^2+x+1}-3x^3-18x^2-21x-12}{2\sqrt{x^2+x+1}\left((x-1)\sqrt{x^2+x+1}-2\right)^2}$$

- Nói chung phần này chỉ giúp tính toán nhanh hơn chứ không có ứng dụng gì nhiều cả.

D. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM 2 CĂN

Nói chung thủ thuật này không hữu ích nhiều như thủ thuật tính đạo hàm 1 căn, nhất là đối với máy CASIO 570 Vn – Plus bị sai số nhiều còn chưa kể bị tràn màn hình. Nhưng thôi mình cứ nói để tham khảo.

Bây giờ ta cần tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{a\sqrt{u(x)}+b\sqrt{v(x)}+c\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+d}{e\sqrt{u(x)}+f\sqrt{v(x)}+g\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+h}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x\sqrt{u(x)}+y\sqrt{v(x)}+z\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+m}{4\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}\left(e\sqrt{u(x)}+f\sqrt{v(x)}+g\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+h\right)^2}$$

Đầu tiên nhập vào máy và CALC 1000 lưu vào A

$$4\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}\left(e\sqrt{u(x)}+f\sqrt{v(x)}+g\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+h\right)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{a\sqrt{u(x)}+b\sqrt{v(x)}+c\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+d}{e\sqrt{u(x)}+f\sqrt{v(x)}+g\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}+h}\right)\Bigg|_{x=X}$$

Tiếp theo đổi dấu lần lượt từng căn rồi cuối cùng là cả hai căn, gán lần lượt vào các biến B,C,D.

Khi đó: $\begin{cases} x=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{u(x)}} \\ y=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{v(x)}} \end{cases} \vee \begin{cases} z=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{v(x)}\sqrt{u(x)}} \\ m=\dfrac{A+B+C+D}{4} \end{cases}$

Nhìn khủng khiếp chứ!

Ví dụ : Tính đạo hàm của hàm số sau: $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x-1}+2}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1}$

Nhập vào máy:

$$4\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1\right)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x-1}+2}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1}\right)\Bigg|_{x=X}$$

Làm như hướng dẫn ta sẽ được đạo hàm có dạng:

$$f'(x)=\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{x-1}+c\sqrt{x}\sqrt{x-1}+d}{4\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+1\right)^2}$$

Với $\begin{cases} a=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{x}}=4x^2-6x-8 \\ b=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{x-1}}=4x^2+2x-2 \\ c=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{x}\sqrt{x-1}}=8x-4 \\ d=\dfrac{A+B+C+D}{4}=8x^2-24x+6 \end{cases}$

Thử lại thấy đúng.